ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 4

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Étant donnés trois nombres réels d, a, b strictement positifs tels que $a < b$, on note C_a le cercle de centre O et de rayon a dans le plan $z = 0$ et C_b le cercle de centre $(0, 0, d)$ de rayon b dans le plan $z = d$.

On note $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des fonctions $\varphi : (\rho, \theta) \longmapsto \varphi(\rho, \theta)$, à valeurs réelles, continues sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

- pour tout élément ρ de $[a, b]$, la fonction $\theta \longmapsto \varphi(\rho, \theta)$ est 2π - périodique ;
- la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]a, b[\times \mathbb{R}$;
- les dérivées partielles premières de φ se prolongent en des fonctions continues sur $[a, b] \times \mathbb{R}$, que l'on note encore $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \rho}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}$.

Pour tout élément φ de $\mathscr{E}$, on note $S(\varphi)$ la fonction continue sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ définie par :

$$(1) \qquad S(\varphi) = \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2} ;$$

et on pose :

$$(2) \qquad A(\varphi) = \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} S(\varphi)(\rho, \theta)\, d\theta \right) d\rho .$$

On note $\mathscr{E}_d$ l'ensemble des éléments φ de $\mathscr{E}$ tels que, pour tout nombre réel θ, $\varphi(a, \theta) = 0$, $\varphi(b, \theta) = d$. À tout élément φ de $\mathscr{E}_d$, on associe la surface $\sum_\varphi$ de $\mathbb{R}^3$ associée à la représentation paramétrique définie sur $K = [a, b] \times [0, 2\pi]$ par :

$$\overrightarrow{OM}(\rho, \theta) = \rho\, \vec{u}(\theta) + \varphi(\rho, \theta)\, \vec{k}$$

où on pose : $$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}.$$

Une telle surface $\sum_\varphi$ passe par les cercles C_a et C_b.

On rappelle que l'aire $\mathscr{A}(\sum_\varphi)$ de cette surface est donnée par la relation :

$$\mathscr{A}(\sum_\varphi) = \iint_K \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right\| d\rho\, d\theta ,$$

où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$.

Dans ce problème, on se propose de prouver que parmi les surfaces $\sum_\varphi$, où φ parcourt $\mathscr{E}_d$, celles qui minimisent $\mathscr{A}(\sum_\varphi)$ sont des surfaces de révolution d'axe Oz dont la méridienne est un arc de chaînette.

Tournez la page S.V.P.

I. Étude d'une équation différentielle auxiliaire

1. Soit α un nombre réel strictement positif.

On considère les fonctions $\rho \longmapsto z = f(\rho)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, solutions sur $[a, b]$ du problème de Cauchy suivant :

$$(3) \qquad \frac{\rho f'(\rho)}{\sqrt{1 + (f'(\rho))^2}} = \alpha \qquad \text{et} \qquad f(a) = 0.$$

a. Établir que ce problème admet une solution si et seulement si $\alpha < a$, et que l'unique solution est alors définie par :

$$(4) \qquad z = f(\rho) = \alpha \operatorname{Arg\,ch} \frac{\rho}{\alpha} + \gamma \qquad \text{où} \qquad \gamma = -\alpha \operatorname{Arg\,ch} \frac{a}{\alpha}.$$

b. Prouver que la fonction f définie par (4) est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a, b]$ sur $[0, c]$ où $c = f(b) = \alpha \left[\operatorname{Arg\,ch} \frac{b}{\alpha} - \operatorname{Arg\,ch} \frac{a}{\alpha} \right]$, et que (4) équivaut à :

$$(5) \qquad \rho = \alpha \operatorname{ch}\left(\frac{z - \gamma}{\alpha}\right) \quad \text{où } \gamma = -\alpha \operatorname{Arg\,ch} \frac{a}{\alpha} \qquad \text{et} \qquad z \in [0, c].$$

En particulier, $\gamma < 0$; on pose alors $\gamma = -\beta d$ où $\beta > 0$.

2. Pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs tels que $\alpha < a$, on note $\Gamma_{\alpha,\beta}$ l'arc de chaînette du plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{k}, \vec{u})$ d'équation cartésienne :

$$\rho = \alpha \operatorname{ch}\left(\frac{z + \beta d}{\alpha}\right) \text{ où } z \text{ parcourt } [0, d].$$

On se propose de déterminer les arcs $\Gamma_{\alpha,\beta}$ passant par les points A et B définis par $\overrightarrow{OA} = a\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = d\vec{k} + b\vec{u}$.

a. Montrer que $\Gamma_{\alpha,\beta}$ passe par A et B si et seulement si (α, β) satisfait aux conditions suivantes :

$$(6) \qquad \begin{cases} \operatorname{Arg\,ch} \dfrac{b}{\alpha} - \operatorname{Arg\,ch} \dfrac{a}{\alpha} - \dfrac{d}{\alpha} = 0, \quad \alpha < a \\ \beta = \dfrac{\alpha}{d} \operatorname{Arg\,ch} \dfrac{a}{\alpha} \end{cases}$$

b. Soit w la fonction définie sur $\left[\frac{1}{a}, +\infty\right[$ par $w(t) = \operatorname{Arg\,ch} bt - \operatorname{Arg\,ch} at - dt$. Étudier l'existence et l'unicité des solutions de l'équation $w(t) = 0$.

c. En déduire qu'il existe un arc $\Gamma_{\alpha,\beta}$ passant par A et B si et seulement si $b > a \operatorname{ch} \frac{d}{a}$, et qu'alors (α, β) est l'unique couple de nombres réels satisfaisant aux conditions (6).

d. Prouver finalement que le problème aux limites :

$$(7) \qquad \frac{d}{d\rho}\left[\frac{\rho f'(\rho)}{\sqrt{1+(f'(\rho))^2}}\right] = 0,\ f(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = d,$$

admet une solution f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]a, b[$ si et seulement si $b > a \operatorname{ch} \frac{d}{a}$ et que, dans ces conditions, il existe une solution et une seule de ce problème, à savoir la fonction f_0 définie sur $[a, b]$ par :

$$(8) \qquad f_0(\rho) = \alpha \operatorname{Arg\,ch} \frac{\rho}{\alpha} - \beta d,$$

où (α, β) est l'unique couple de nombres réels satisfaisant aux conditions (6).

II. Recherche des surfaces Σ_φ de révolution d'aire minimale

On note E l'espace vectoriel des fonctions $f: \rho \mapsto f(\rho)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]a, b[$. Dans ces conditions l'application $\varphi : (\rho, \theta) \mapsto f(\rho)$ est un élément de $\mathscr{E}$ que l'on identifie à f. On pose donc :

$$(1) \qquad S(f) = \rho\sqrt{1+(f'(\rho))^2}$$

$$(2) \qquad A(f) = \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} S(f)(\rho, \theta)\, d\theta\right) d\rho = 2\pi \int_a^b S(f)(\rho)\, d\rho.$$

On note E_d l'ensemble des éléments f de E tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = d$. On note E_0 l'ensemble des éléments h de E tels que $h(a) = h(b) = 0$.

À tout élément f de E_d, on associe la surface $\sum_f$, qui est une surface de révolution d'axe Oz passant par les cercles C_a et C_b, définie par :

$$\overrightarrow{OM}(\rho, \theta) = \rho\vec{u}(\theta) + f(\rho)\vec{k}.$$

1. *Calcul de l'aire* $\mathscr{A}(\sum_f)$.

Montrer que $\mathscr{A}(\sum_f) = A(f) = 2\pi \int_a^b \rho\sqrt{1+(f'(\rho))^2}\, d\rho$.

2. *Condition nécessaire pour que* $A(f)$ *soit minimale.*

Soit f un élément de E_d tel que pour tout élément g de E_d, $A(f) \leqslant A(g)$.

a. Soit h un élément de E_0 et J la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $J(\lambda) = A(f + \lambda h)$. Prouver que J est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer $J'(0)$ sous forme d'une intégrale.

En déduire que, pour tout élément h de E_0,

$$\int_a^b \frac{\rho f'(\rho)}{\sqrt{1+(f'(\rho))^2}}\, h'(\rho)\, d\rho = 0.$$

Tournez la page S.V.P.

b. Prouver que, pour toute fonction h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, à support compact contenu dans $]a, b[$, c'est-à-dire nulle en dehors d'un intervalle $[c, d]$ contenu dans $]a, b[$,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\rho f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right) h(\rho)\,\mathrm{d}\rho = 0.$$

c. Soit g une fonction continue sur $]a, b[$ telle que $\int_a^b g(\rho)\,h(\rho)\,\mathrm{d}\rho = 0$ pour toute fonction h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ à support compact contenu dans $]a, b[$. Prouver que $g = 0$.

On raisonnera par l'absurde en supposant par exemple qu'il existe ρ_0 appartenant à $]a, b[$ tel que $g(\rho_0) > 0$. On montrera qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $[\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon]$ soit contenu dans $]a, b[$ et sur lequel g est à valeurs positives. On pourra alors construire et utiliser une fonction h positive *non nulle* de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ et nulle en dehors de $[\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon]$.

d. Prouver finalement que si f est un élément de E_d tel que $\mathrm{A}(f)$ soit un minimum alors, nécessairement, $b > a$ ch $\frac{d}{a}$, et que, dans ces conditions, f est égale à la fonction f_0 définie sur $[a, b]$ par la relation (8) à la fin de la partie I. Vérifier que f_0 est un élément de E_d.

3. *Existence et unicité d'un minimum pour A (f).*

On suppose que $b > a$ ch $\frac{d}{a}$ et on note f_0 la fonction définie par (8). On se propose de prouver que, pour tout élément g de E_d, $\mathrm{A}(f_0) \leqslant \mathrm{A}(g)$ avec égalité si et seulement si $g = f_0$.

a. Prouver que, pour tout élément h de E_0,

$$\mathrm{A}(f_0 + h) - \mathrm{A}(f_0) = \int_a^b \rho\,(\|\vec{u}(\rho) + \vec{v}(\rho)\| - \|\vec{u}(\rho)\|)\,\mathrm{d}\rho$$

où $\vec{u}(\rho)$ et $\vec{v}(\rho)$ sont les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de composantes respectives $(1, f_0'(\rho))$ et $(0, h'(\rho))$.

b. Prouver que, pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathbb{R}^2$, où $\vec{u} \neq \vec{0}$,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u}\| \geqslant \frac{(\vec{u}\,|\,\vec{v})}{\|\vec{u}\|},$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (on pourra appliquer l'inégalité de Schwarz).

c. Soit h un élément de E_0. On note F la fonction définie sur $[a, b]$ par :

$$\mathrm{F}(\rho) = \sqrt{1 + (f_0'(\rho) + h'(\rho))^2} - \sqrt{1 + (f_0'(\rho))^2} - \alpha\,h'(\rho).$$

Prouver que $\mathrm{F} \geqslant 0$ et que F est la fonction nulle si et seulement si h est la fonction nulle.

En déduire que, pour tout élément h de E_0,

$\mathrm{A}(f_0 + h) \geqslant \mathrm{A}(f_0)$ et que l'égalité est réalisée si et seulement si h est la fonction nulle.

d. En conclure que l'application $f \mapsto \mathrm{A}(f)$ définie sur E_d atteint son minimum en un point et un seul, à savoir f_0. Ainsi l'aire $\mathscr{A}(\Sigma_f)$ atteint son minimum lorsque $f = f_0$.

III. Recherche des surfaces Σ_φ d'aire minimale

Dans cette partie, on montre que la minimisation de l'aire $\mathscr{A}(\Sigma_\varphi)$ des surfaces Σ_φ où φ parcourt $\mathscr{E}_d$ se ramène à celle de l'aire $\mathscr{A}(\Sigma_f)$ des surfaces de révolution Σ_f où f parcourt E_d. À cet effet, pour toute fonction ψ continue sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ telle que, pour tout élément ρ de $[a, b]$, $\theta \mapsto \psi(\rho, \theta)$ soit 2π-périodique, on introduit la fonction $M(\psi)$ définie sur $[a, b]$ par :

$$M(\psi)(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho, t)\, dt, \tag{9}$$

obtenue par moyenne sur $[0, 2\pi]$ de $t \mapsto \psi(\rho, t)$. On s'appuie alors sur les deux énoncés (P) et (P*) suivants :

(P) Pour tout élément φ de $\mathscr{E}$, $M(\varphi)$ appartient à E et

$$S(M(\varphi)) \leqslant M(S(\varphi)). \tag{10}$$

(P*) Soit φ un élément de $\mathscr{E}_d$ pour lequel il y a égalité dans (10), alors, pour tout élément ρ de $[a, b]$ la fonction $t \mapsto \varphi(\rho, t)$ est constante sur $[0, 2\pi]$.

La démonstration de (P) fait l'objet des questions 3 et 4 ; l'énoncé (P*) sera admis.

1. *Calcul de l'aire de la surface Σ_φ.*

Soit φ un élément de $\mathscr{E}_d$.

a. Prouver que :

$$\mathscr{A}(\Sigma_\varphi) = A(\varphi) = \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} S(\varphi)(\rho, \theta)\, d\theta \right) d\rho,$$

où $S(\varphi)$ est défini par (1).

b. Soient t un nombre réel et R_t la rotation d'axe Oz dont l'angle a pour mesure t. Déterminer une représentation paramétrique φ_t appartenant à $\mathscr{E}_d$ de $R_t(\Sigma_\varphi)$ et prouver que $S(\varphi_t)(\rho, \theta) = S(\varphi)(\rho, \theta + t)$. En déduire que $A(\varphi_t) = A(\varphi)$ et interpréter géométriquement cette relation.

c. Montrer que, pour tout élément (ρ, θ) de $[a, b] \times \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\varphi_t)(\rho, \theta)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\varphi)(\rho, t)\, dt = M(S(\varphi))(\rho).$$

2. *Minimisation de l'aire de Σ_φ.*

Dans cette question, on suppose acquis les énoncés (P) et (P*).

a. Soient φ un élément de $\mathscr{E}$ et $f = M(\varphi)$ sa moyenne. Prouver que $A(f) \leqslant A(\varphi)$ et que cette inégalité est stricte à moins que Σ_φ soit de révolution autour de Oz, c'est-à-dire que, pour tout élément ρ de $[a, b]$, $\theta \mapsto \varphi(\rho, \theta)$ soit constante.

b. Établir que, pour tout élément φ de $\mathscr{E}_d$, $M(\varphi)$ appartient à E_d et que :

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{E}_d} A(\varphi) = \inf_{f \in E_d} A(f).$$

Tournez la page S.V.P.

c. On suppose que $b > a$ ch $\frac{d}{a}$ et on note f_0 la fonction définie sur $[a, b]$ par (8). Montrer que l'application $\varphi \mapsto A(\varphi)$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir f_0.

3. *Convexité de* $\varphi \mapsto S(\varphi)$.

a. Soient δ un nombre réel strictement positif, σ un nombre réel et G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = \sqrt{(t-\sigma)^2 + \delta^2}$. Prouver que la dérivée seconde de G est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire qu'étant donnés des nombres réels A, B, C tels que, pour tout nombre réel t,

$$D(t) = A t^2 + B t + C > 0,$$

alors la dérivée seconde de $t \mapsto G(t) = \sqrt{D(t)}$ est positive sur $\mathbb{R}$.

c. Soient φ et ψ des éléments de $\mathscr{E}$ et, ρ et θ étant fixés, G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(t) = S((1-t)\varphi + t\psi)(\rho, \theta).$$

Prouver que G'' est positive. En déduire que, pour tout élément t de $[0, 1]$

$$S(t\varphi + (1-t)\psi) \leqslant t S(\varphi) + (1-t) S(\psi).$$

d. Prouver, plus généralement, qu'étant donné un entier $n \geqslant 2$, une suite $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ d'éléments de $\mathscr{E}$ et une suite $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ de nombres réels positifs tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$,

$$S\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k S(\varphi_k).$$

4. *Preuve de l'énoncé* (P).

Soit φ un élément de $\mathscr{E}$. Étant donné un entier $n \geqslant 2$, pour tout entier k appartenant à $[1, n]$, on pose $t_k = \frac{2k\pi}{n}$ et on note $M_n(\varphi)$ la fonction définie sur $[a, b]$ par $M_n(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$, où $\varphi_k(\rho) = \varphi(\rho, t_k)$.

a. Prouver que $M(\varphi)$ est un élément de E et donner l'expression de la dérivée $M(\varphi)'$ de $M(\varphi)$.

b. Prouver que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$S(M_n(\varphi)) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S(\varphi_k).$$

c. Soit ρ un élément donné de $[a, b]$. Prouver que si n tend vers $+\infty$,

$M_n(\varphi)(\rho)$ tend vers $M(\varphi)(\rho)$

$M_n(\varphi)'(\rho)$ tend vers $M(\varphi)'(\rho)$.

d. Prouver enfin l'énoncé (P).